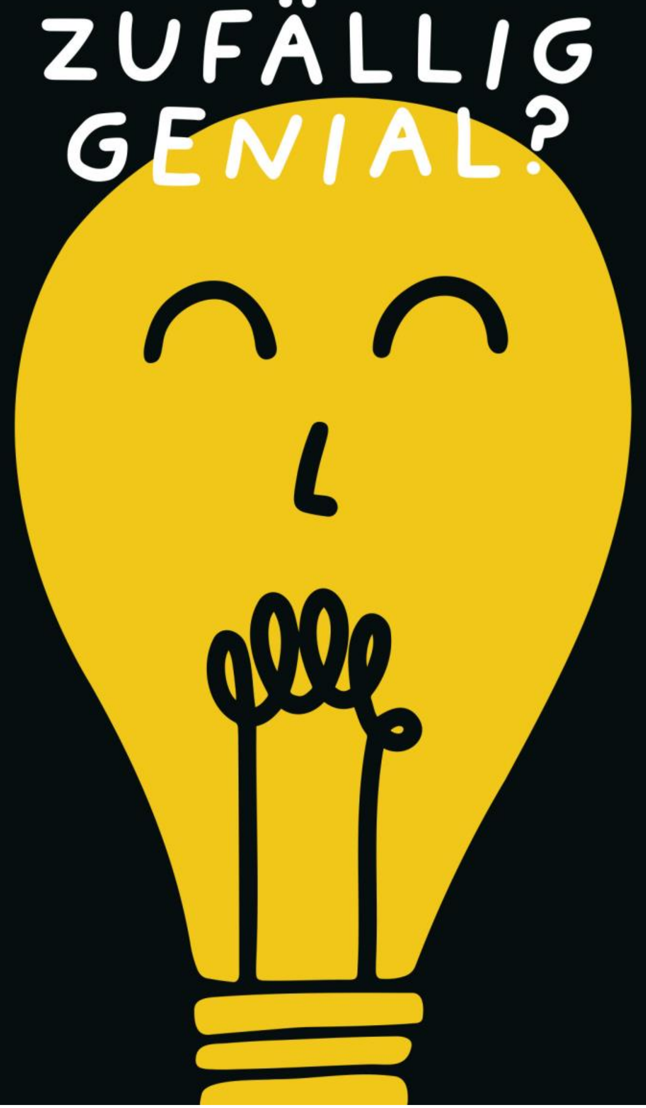
Mathematik/Informatik

Ein Beispiel für Chaos: Quadratischer Iterator und Sägezahnfunktion

Cedric Friedrich
Max-von-Laue-Gymnasium Koblenz



Landeswettbewerb Rheinland-Pfalz

BASF
We create chemistry

BASF ist Patenfirma des
Landeswettbewerbs Jugend forscht
in Rheinland-Pfalz

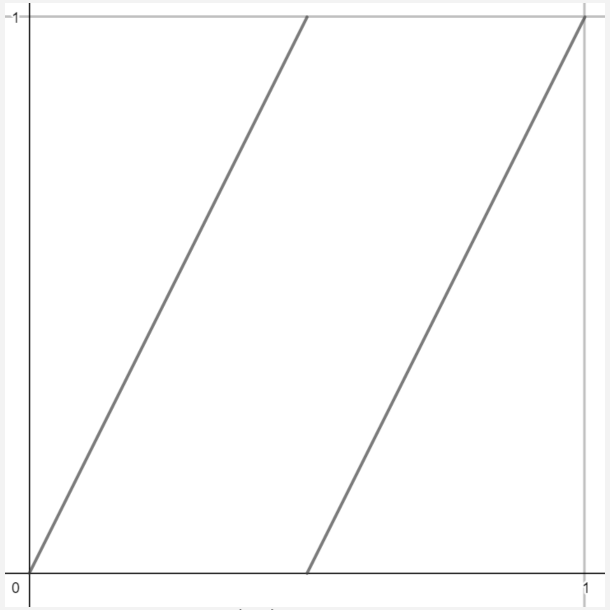
jugend forscht 2022

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium
für Bildung
und Forschung

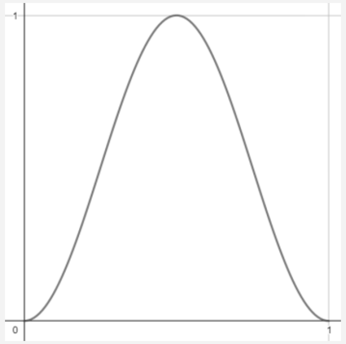
Definition von Chaos

- Was ist das eigentlich: Chaos? Um das mathematisch analysieren zu können, bedarf es zunächst eines konkreten Systems und einer genauen Definition von *Chaos*.
- Als System betrachte ich die Iteration von Funktionen auf dem Intervall [0, 1]. Das heißt, ich habe eine Funktion f, die jeder reellen Zahl zwischen 0 und 1 eine weitere solche Zahl zuordnet. Dann wähle ich einen Startwert x_0 und beobachte, was passiert, wenn ich f auf x_0 mehrfach anwende: $f(x_0), f\left(f(x_0)\right), f\left(f\left(f(x_0)\right)\right), \ldots$
- Für dieses System kann man mathematisch präzise definieren, was es für die Funktion f bedeutet, *chaotisch* zu sein, um genau zu sein, muss sie genau 3 Eigenschaften erfüllen.
- In meiner Arbeit beschäftige ich mich damit, wie man für bestimmte Funktionen, wie zum Beispiel $f(x) = 4x(1-x)$, beweisen kann, dass sie diese Eigenschaften aufweisen.

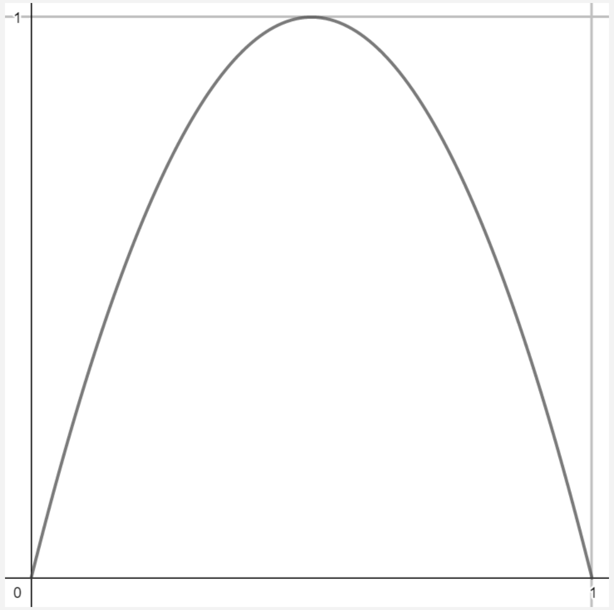
Quadratischer Iterator und Sägezahnfunktion



$g(x)$



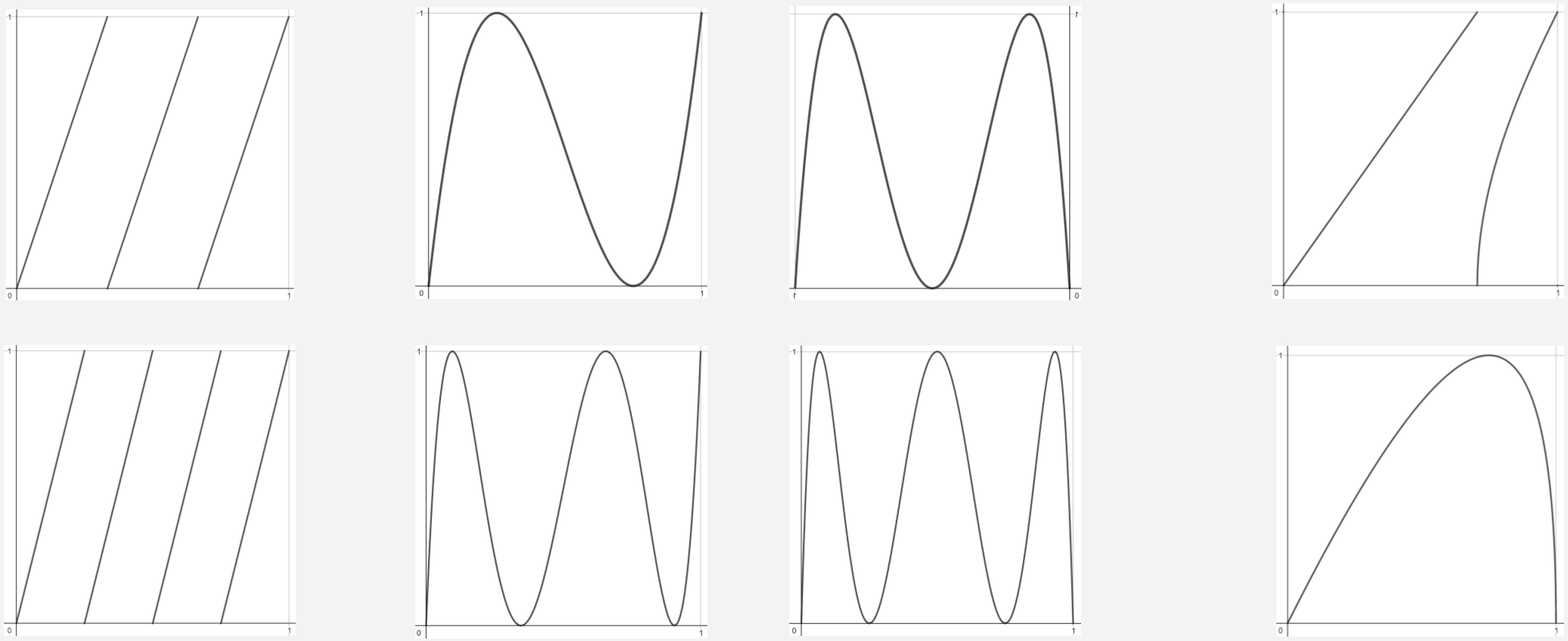
$h(x) = \sin^2(\pi x)$



$f(x) = 4x(1-x)$

- Von der Sägezahnfunktion g kann man leicht beweisen, dass sie chaotisch ist.
- Mit Hilfe der Koordinatentransformation h kann man das Wissen um diese Eigenschaft auf die Funktion f, den quadratischen Iterator, übertragen, die folglich auch chaotisch ist.

Neue chaotische Funktionen



- Meine Verallgemeinerung dieses Beweisschemas führte mich auf einige weitere Funktionen, deren Chaotizität ich ebenfalls beweisen konnte.